ძვირფასო სტუდენტებო,
დავალების შესრულების დაწყებამდე,
გთხოვთ, ჯერ გაეცნოთ განმარტებით წერილს

მათემატიკა ეკონომიკისა და ბიზნესისათვის 1

დავალება № 10. ვექტორები

ქვემოთ მოყვანილ ცხრილში მოცემული სავარჯიშოები აღებულია სილაბუსში მითითებული [2] სალექციო კურსიდან. კერძოდ, ლექცია 10-ის ბოლო პუნქტში მოყვანილი სავარჯიშოებიდან. გამუქებულია იმ ტიპური სავარჯიშოების ნომრები, რომელთა ამოხსნები გადმოცემულია აქ. გაეცანით ამ ამოხსნებს, დანარჩენი სავარჯიშოები კი შეასრულეთ დამოუკიდებლად.

სავარჯიშოების პირობები და პასუხები იხილეთ [2]-ში.

სავარჯიშოები №

1-ა,ბ,გ	2	3	4	**5-ა**	5-ბ	6-ა,ბ	7	8	9-ა,გ	9-ბ,დ	10
11-ა,გ	11-ბ,დ	12	13	14	15-ა	15-ბ	16-ა,გ	16-ბ,დ,ე	17	18	19
20	21	22	23								

ტიპური სავარჯიშოების ამოხსნა

2. გამოთვალეთ:

$$4\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ამოხსნა. ვექტორის რიცხვზე გამრავლებისა და ვექტორების შეკრების ოპერაციების განსაზღვრების ძალით, გვექნება:

$$4\begin{pmatrix}2\\-3\\4\\1\\0\end{pmatrix}+(-2)\begin{pmatrix}1\\2\\-5\\2\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\3\\0\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\cdot 2\\4\cdot(-3)\\4\cdot 4\\4\cdot 1\\4\cdot 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}(-2)\cdot 1\\(-2)\cdot 2\\(-2)\cdot(-5)\\(-2)\cdot 2\\(-2)\cdot 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\3\\0\\1\\2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}8\\-12\\16\\4\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\-4\\10\\-4\\-8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\3\\0\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8+(-2)+(-1)\\-12+(-4)+3\\16+10+0\\4+(-4)+1\\0+(-8)+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-13\\26\\1\\-6\end{pmatrix}$$

პასუხი. $\begin{pmatrix}5\\-13\\26\\1\\-6\end{pmatrix}$.

4. იპოვეთ α შემდეგი ტოლობიდან:

$$\alpha\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+4\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix}.$$

ამოხსნა.

$$\begin{pmatrix}\alpha\\2\alpha\\-\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}12\\16\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-13\\-16\\-4\end{pmatrix}.$$

ორი ვექტორის ტოლობის განსაზღვრების ძალით, α რიცხვისთვის ერთდროულად უნდა შესრულდეს შემდეგი პირობები: $\alpha=-13$; $2\alpha=-16$ და $(-\alpha)=-4$, რაც შეუძლებელია. ამგვარად, ასეთი α რიცხვი არ არსებობს.

პასუხი. არ არსებობს.

5. მოცემულია ვექტორები: $a=\begin{pmatrix}2\\-3\\4\\-2\\1\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}2\\-3\\1\\0\\5\end{pmatrix}$, $c=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\\3\\4\end{pmatrix}$. იპოვეთ:

ბ). $(a+2b)c$.

ამოხსნა.

$$a+2b=\begin{pmatrix}2\\-3\\4\\-2\\1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}2\\-3\\1\\0\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-9\\6\\-2\\11\end{pmatrix},$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{2b})\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}6\\-9\\6\\-2\\11\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\2\\3\\4\end{pmatrix}=6\cdot(-1)+(-9)\cdot 0+6\cdot 2+(-2)\cdot 3+11\cdot 4=44.$$

პასუხი. $(a+2b)c$ =44.

7. ფირმამ დაამზადა სამი სახის პროდუქცია: c_1, c_2, c_3 შესაბამისად 1200 ერთეული, 1400 ერთეული, 2000 ერთეული. ერთეული პროდუქციის ფასი, შესაბამისად, არის 5 ლარი, 3 ლარი, 4 ლარი. გამოთვალეთ სრული ამონაგები, როგორც ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი.

ამოხსნა. განვიხილოთ წარმოებული პროდუქციის რაოდენობებისაგან შედგენილი $q = \begin{pmatrix} 1200 \\ 1400 \\ 2000 \end{pmatrix}$ და შესაბამისი ფასებისაგან შედგენილი $p = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ვექტორები, მაშინ სრული ამონაგები $R(q)$ ტოლი იქნება ამ ვექტორების სკალარული ნამრავლის:

$$R(q) = q \cdot p = \begin{pmatrix} 1200 \\ 1400 \\ 2000 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 1200 \cdot 5 + 1400 \cdot 3 + 2000 \cdot 4 = 18200 \text{ (ლარი)}.$$

პასუხი. 18200 ლარი.

9. შეისწავლეთ, წრფივად დამოუკიდებელია თუ წრფივად დამოკიდებული ვექტორთა შემდეგი სისტემები:

ა). $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$.

ამოხსნა. $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ და $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ ვექტორების წრფივი კომბინაცია გავუტოლოთ ნულოვან ვექტორს:

$$\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ანუ } \begin{pmatrix} 2\alpha + 4\beta \\ -4\alpha + 3\beta \\ 5\alpha + 6\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

მივიღეთ წრფივმ ერთგავოვან განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} 2\alpha + 4\beta = 0 \\ -4\alpha + 3\beta = 0 \\ 5\alpha + 6\beta = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ 11\beta = 0 \\ 4\beta = 0 \end{cases}, \text{ საიდანაც } \alpha = 0 \text{ და } \beta = 0.$$

რადგან სისტემას მხოლოდ ნულოვანი ამონახსნი აქვს, ამიტომ ვექტორთა მოცემული სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია.

პასუხი. ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია.

გ). $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

ამოხსნა. $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ და $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ ვექტორების წრფივი კომბინაცია გავუტოლოთ ნულოვან ვექტორს:

$$\alpha \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ანუ } \begin{pmatrix} 4\alpha \\ \beta \\ 3\gamma \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

მივიღეთ წრფივ, ერთგავოვან განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} 4\alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ 3\gamma = 0 \end{cases}, \text{ საიდანაც } \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

რადგან სისტემას მხოლოდ ნულოვანი ამონახსნი აქვს, ამიტომ ვექტორთა მოცემული სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია.

პასუხი. ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია.

11. ვექტორთა შემდეგი სიმრავლეებიდან რომელი წარმოადგენს R^3 ვექტორული სივრცის ბაზისს?

ა). $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}\right\}$.

ამოხსნა. იმისათვის, რომ $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}$ და $\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$ ვექტორები ადგენდნენ R^3 ვექტორული სივრცის ბაზისს აუცილებელი და საკმარისია, რომ ისინი იყვნენ წრფივად დამოუკიდებელი, ანუ შესაბამის წრფივ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემას ჰქონდეს მხოლოდ ნულოვანი ამონახსნი. კრამერის თეორემის ძალით, წრფივ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემას აქვს მხოლოდ ნულოვანი ამონახსნი, როცა სისტემის დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავებულია. სისტემის დეტერმინანტის სტრიქონები (ან სვეტები) მოცემული ვექტორების შესაბამისი კოორდინატებია.

შევადგინოთ დეტერმინანტი:

$$\begin{vmatrix}1&0&0\\2&2&0\\3&3&3\end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 3 = 6 \neq 0.$$

ამგვარად, მოცემული ვექტორების ერთობლიობა ადგენს R^3 ვექტორული სივრცის ბაზისს.

პასუხი. სივრცის ბაზისია.

გ). $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}\right\}$.

ამოხსნა.

შევადგინოთ დეტერმინანტი:

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\2&1&3\\3&0&3\end{vmatrix} = 3+9+0-3-6-0 = 3 \neq 0.$$

მოცემული ვექტორების ერთობლიობა ადგენს R^3 ვექტორული სივრცის ბაზისს.

პასუხი. სივრცის ბაზისია.

13. $\boldsymbol{R^2}$ ვექტორულ სივრცეში წარმოადგინეთ $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ ვექტორი $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ და $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ ვექტორების წრფივი კომბინაციის სახით (თუ ეს შესაძლებელია).

ამოხსნა. იმის დასადგენად შესაძლებელია თუ არა $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ ვექტორის წარმოდგენა $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ და $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ ვექტორების წრფივი კომბინაციის სახით, უნდა შევამოწმოთ არსებობს თუ არა ისეთი α და β ნამდვილი რიცხვები, რომ სრულდება ტოლობა:

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \text{ ანუ } \begin{pmatrix}\alpha+\beta\\2\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}.$$

გვექნება წრფივ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases}\alpha+\beta = 2\\2\alpha \quad\;\; = 1\end{cases}, \text{ საიდანაც } \alpha = 0{,}5 \text{ და } \beta = 1{,}5.$$

ამგვარად,

$$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = 0{,}5\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + 1{,}5\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$

პასუხი. $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = 0{,}5\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + 1{,}5\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

15. აჩვენეთ, რომ ვექტორთა $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ სისტემა არის ბაზისი R^3-ში და ჩაწერეთ ამ ბაზისის ვექტორების საშუალებით შემდეგი ვექტორები:

ა). $\begin{pmatrix}-2\\0\\-1\end{pmatrix}$.

ამოხსნა.

რადგან დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{vmatrix}=1\cdot1\cdot1=1\neq0,$$

ამიტომ ვექტორთა მოცემული სისტემა არის R^3-ის ბაზისი.

ვიპოვოთ α,β და γ ნამდვილი რიცხვები, რომელთათვისაც

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\0\\-1\end{pmatrix} \text{ ანუ } \begin{pmatrix}\alpha+\beta+\gamma\\\beta+\gamma\\\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

მივიღებთ წრფივ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=-2\\\beta+\gamma=0\\\gamma=-1\end{cases}, \text{ საიდანაც } \alpha=-2,\ \beta=1 \text{ და } \gamma=-1.$$

ამგვარად,

$$\begin{pmatrix}-2\\0\\-1\end{pmatrix}=(-2)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

პასუხი. $\begin{pmatrix}-2\\0\\-1\end{pmatrix}=(-2)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

16. ქვემოთ ჩამოთვლილი ვექტორებიდან რომელია საბალანსო ვექტორი?

ა). $\begin{pmatrix}120\\60\\-40\\-140\end{pmatrix}$.

ამოხსნა. რადგან ვექტორის კომპონენტების ჯამი ნულის ტოლია:

$$120+60+(-40)+(-140)=0,$$

ამიტომ ის საბალანსო ვექტორია.

პასუხი. საბალანსო ვექტორია.

გ). $\begin{pmatrix}120\\60\\60\\0\\-40\\140\end{pmatrix}$.

ამოხსნა. რადგან ვექტორის კომპონენტების ჯამი არაა ნულის ტოლი:

$$120+60+60+0+(-40)+140=340\neq0,$$

ამიტომ ის საბალანსო ვექტორი არაა.

პასუხი. არ არის საბალანსო ვექტორი.

18. ცნობილია, რომ საანგარიშო პერიოდში განხორციელდა მხოლოდ სამი ტრანზაქცია, რომელთა ვექტორები შესაბამისად არის $\begin{pmatrix}1200\\600\\-400\\0\\-1400\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2100\\0\\1500\\-1000\\0\\-2600\end{pmatrix}$ და $\begin{pmatrix}1600\\1000\\-1200\\-1400\\0\\0\end{pmatrix}$. იპოვეთ ამ

პერიოდის საბალანსო მატრიცა, თუ საანგარიშო პერიოდის საწყისი ეტაპის საბალანსო ვექტორია $\begin{pmatrix} 850 \\ 1300 \\ 0 \\ -2000 \\ 0 \\ -150 \end{pmatrix}$.

ამოხსნა. ვიპოვოთ პირველი, მეორე და მესამე ტრანზაქციის შემდეგ მიღებული საბალანსო ვექტორები. ამისათვის მოცემულ ეტაპზე არსებულ საბალანსო ვექტორს დავუმატოთ შესაბამისი ტრანზაქციის საბალანსო ვექტორი:

$$\begin{pmatrix} 850 \\ 1300 \\ 0 \\ -2000 \\ 0 \\ -150 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1200 \\ 600 \\ -400 \\ 0 \\ -1400 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2050 \\ 1900 \\ -400 \\ -2000 \\ -1400 \\ -150 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2050 \\ 1900 \\ -400 \\ -2000 \\ -1400 \\ -150 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2100 \\ 0 \\ 1500 \\ -1000 \\ 0 \\ -2600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4150 \\ 1900 \\ 1100 \\ -3000 \\ -1400 \\ -2750 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 4150 \\ 1900 \\ 1100 \\ -3000 \\ -1400 \\ -2750 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1600 \\ 1000 \\ -1200 \\ -1400 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5750 \\ 2900 \\ -100 \\ -4400 \\ -1400 \\ -2750 \end{pmatrix}.$$

რადგან საანგარიშო პერიოდის საბალანსო მატრიცის სვეტებია საწყისი და ტრანზაქციების ჩატარების შემდეგ მიღებული საბალანსო ვექტორები, ამიტომ მას ექნება სახე:

$$\begin{pmatrix} 850 & 2050 & 4150 & 5750 \\ 1300 & 1900 & 1900 & 2900 \\ 0 & -400 & 1100 & -100 \\ -2000 & -2000 & -3000 & -4400 \\ 0 & -1400 & -1400 & -1400 \\ -150 & -150 & -2750 & -2750 \end{pmatrix}.$$

პასუხი. $\begin{pmatrix} 850 & 2050 & 4150 & 5750 \\ 1300 & 1900 & 1900 & 2900 \\ 0 & -400 & 1100 & -100 \\ -2000 & -2000 & -3000 & -4400 \\ 0 & -1400 & -1400 & -1400 \\ -150 & -150 & -2750 & -2750 \end{pmatrix}$.

20. 4-პროდუქტიან სივრცეში გამოთვალეთ $\begin{pmatrix} 130 \\ 140 \\ 80 \\ 90 \end{pmatrix}$ ნაკრების ფასი, თუ ამ სივრცის ფასთა ვექტორია $\begin{pmatrix} 12 \\ 18 \\ 9 \\ 30 \end{pmatrix}$.

ამოხსნა. განსაზღვრებით, ნაკრების ფასი ნაკრების და ფასების ვექტორების სკალარული ნამრავლი ტოლია:

$$\begin{pmatrix} 130 \\ 140 \\ 80 \\ 90 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \\ 9 \\ 30 \end{pmatrix} = 130 \cdot 12 + 140 \cdot 18 + 80 \cdot 9 + 90 \cdot 30 = 7500.$$

პასუხი. 7500.

21. 3-პროდუქტიან სივრცეში, რომლის ფასების ვექტორია $\begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 6 \end{pmatrix}$, არის პროდუქციათა ნაკრებები $\begin{pmatrix} 150 \\ 150 \\ 200 \end{pmatrix}$ და $\begin{pmatrix} 120 \\ 240 \\ 180 \end{pmatrix}$ ექვივალენტური?

ამოხსნა. გამოვთვალოთ თითოეული პროდუქციათა ნაკრების ფასი:

$$\begin{pmatrix} 150 \\ 150 \\ 200 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 6 \end{pmatrix} = 150 \cdot 10 + 150 \cdot 15 + 200 \cdot 6 = 4950,$$

$$\begin{pmatrix} 120 \\ 240 \\ 180 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 6 \end{pmatrix} = 120 \cdot 10 + 240 \cdot 15 + 180 \cdot 6 = 5880.$$

რადგან პროდუქციის ნაკრებთა ფასები ერთმანეთის ტოლი არაა, ამიტომ ისინი არ არიან ექვივალენტურები.

პასუხი. პროდუქციათა მოცემული ნაკრებები ექვივალენტურები არ არიან.